Ecole centrale

ESSAI

DE MATHÉMATIQUES,

A L'ÉCOLE CENTRALE

DU DÉPARTEMENT DE LA DORDOGNE,

Le 3 Fructidor, an VII de la République française, dans la Salle Décadaire, à trois heures après-midi.

A PÉRIGUEUX,

Chez L. CANLER, Imprimeur du Département et de l'École centrale, restant à la ci-devant petite Mission.

An VII.^e de la République.

ESSAI DE MATHÉMATIQUES,

A L'ÉCOLE CENTRALE

DU DÉPARTEMENT DE LA DORDOGNE.

CALCUL.

I.

COMME les opérations qu'il faut faire pour obtenir la puissance ou la racine d'une quantité algébrique quelconque, sont d'autant plus compliquées, que le rang de cette puissance ou de cette racine est plus élevé; on emploie la formule générale de Newton, $(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \ldots$ &c. Au moyen de laquelle on élève un polynome quelconque, à une puissance quelconque, ou on en extrait la même racine exacte ou approchée.

I I.

Si l'on veut extraire par approximation la racine m de la quantité $(a^m \pm b.)$, b étant très-petit en comparaison de a^m, on pourra, sans employer la formule précédente, qui ne donne que des approximations lentes, avoir recours à celle-ci : $\sqrt[m]{a^m \pm b} = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\frac{a2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)a^{m-2}}}$ qui donne à très-

PROBLÈMES.

Développer la démonstration de la formule du bynome, et en faire quelques applications.

Développer les formules particulières de Halley.

peu près cette racine, et qui contient les formules particulières de *Halley*, dont on peut faire le plus grand usage dans la pratique des mathématiques.

PROBLÈMES.

I I I.

Développer la méthode des coefficiens indéterminés, et l'appliquer à des exemples.

Les séries ou suites sont finies on infinies, convergentes ou divergentes. La méthode des coefficiens indéterminés, est d'un grand usage dans le calcul des séries. Elle a pour but principal de faire connaître la suite des termes que l'on peut déduire de certaines quantités algébriques, en fournissant autant d'équations particulières que des coefficiens indéterminés, au moyen desquelles on trouve la valeur de chaque coefficient. On obtient par cette méthode la valeur approchée d'une expression algébrique fractionnaire, ou la racine approchée d'une quantité quelconque.

I V.

Déterminer en fraction ordinaire, la valeur d'une fraction périodique infinie.

La plus utile des opérations à faire sur les suites, consiste à les sommer. Elle se borne, pour ainsi dire, à trouver la méthode d'en sommer quelques-unes qui servent de formules auxquelles on ramène, s'il est possible, les suites qu'on veut sommer ; c'est ainsi qu'on parvient à sommer la suite $\frac{a}{b} + \frac{a+d}{bq} + \frac{a+2d}{bq^2} + \frac{a+3d}{bq^3} + \&c.$ dont la somme est $\frac{aq2 - aq + dq}{bq^2 - 2bq + b}$. Lorsqu'on ne peut sommer en termes finis une suite infinie, on tâche de la mettre sous une forme rapidement convergente.

V.

PROBLÈMES.

Il est quelquefois utile ou nécessaire d'avoir la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite ou progression quelconque de puissances des nombres naturels, appellant a le premier terme, q le dernier, s la somme des termes, m un exposant servant à désigner les différentes puissances, on aura $q^m = a^m + m(s^{m-1} - q^{m-1}) + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} (s^{m-2} - q^{m-2}) + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (s^{m-3} - q^{m-3}) +$ &c. Expression qui donnera par de simples substitutions la somme de toutes les puissances de tant de nombres naturels qu'on voudra ; d'où l'on tire, lorsque le nombre des termes est infini, $\int^n = \frac{\infty^{n+1}}{n+1}$.

Développer la démonstration de cette formule, et en faire des applications.

V I.

La méthode inverse des séries qu'on appelle aussi *retour des suites*, est une des plus utiles de l'analyse. C'est par l'usage des coefficiens indéterminés qu'on parvient à la démontrer et à la pratiquer. Elle est tout à la fois exacte et commode, et trouve son application dans une infinité de parties mathématiques.

Étant donnée l'équation $x = y^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n}$ & trouver la valeur de y.

V I I.

Invention des logarithmes. Leur nature déduite des progressions géométriques. Tout système logarithmique dépend de la base qu'on choisit. Systême des tables ordinaires. Idées des travaux de ceux qui ont construit des tables de logarithmes. Quelque systême qu'on choisisse, on

S'il y a cent mille habitans dans un département, et que la population y augmente tous les ans de la trentième partie, quel sera le nombre des habitans au bout d'un siècle.

a généralement $L\,1 = o$; $L.\,ab = L\,a + L\,b.$; $L.\frac{a}{b} = La - Lb$; $L.\,a^m = m\,L\,a$; $L.\sqrt[n]{(a^3 + x^3)^m} = \frac{m}{n} L.\,(a - x) + \frac{m}{n} L\,(a^2 + ax + x^2)$; $L\,z^3 + \frac{3}{4} L\,z = L.\,(z^3 \sqrt[4]{z^3})$ &c. Les logarithmes peuvent être d'un grand usage dans la résoluion de plusieurs équations qui paraissent échapper aux règles de l'algèbre ordinaire, si $c = \frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}$ on aura $x = \frac{Lc - Lb}{m\,La - n\,Lb.}$; si $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$ on aura $x = \frac{L.\,b^n}{L\,(\frac{b^m}{ac^q})}$; enfin si $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$; on aura, $x^2\,L\,c^m f - a\,L\,b^n\,fp = -\,L\,b^a$. D'où il est facile de tirer la valeur de x en résolvant l'équation.

PROBLÈMES.

Quelle est la quantité dont il faudrait qu'un peuple s'accrut tous les ans, pour être deux fois plus nombreux à la fin de chaque siècle.

VIII.

Les premiers calculateurs des tables avaient dejà fini leurs calculs, lorsqu'on inventa des méthodes pour les simplifier. Parmi ces méthodes celle des suites a mérité l'attention des géomètres par la rapidité de sa marche. Suivant les principes de cette méthode, l'expression générale du logarithme de $1 \pm x$ est $L\,(1 \pm x) = A\,(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \frac{x^7}{7} -$ &c.

Développer la démonstration de cette formule.

D'où il suit qu'un même nombre peut avoir une infinité de logarithmes. Supposant le module $A = 1$ on aura les logarithmes naturels ou de *Néper*, qu'on appelle aussi logarithmes hyperboliques.

PROBLÈMES.

I X.

Appliquer ces formules à la recherche du logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque.

On tire de la formule précédente, en supposant A = 1, $L.\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = \frac{2y}{a}\left(1 + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{y^4}{5a^4} + \frac{y^6}{7a^6} + \&c.\right)$ Série toujours convergente y étant plus petit que a au moyen de laquelle il serait facile d'avoir le logarithme naturel d'une quantité quelconque. Cette série fournit encore celle-ci. $L\,m = L\,(m-1) + \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3\,(2m-1)^2} + \frac{1}{5\,(2m-1)^4} + \frac{1}{7\,(2m-1)^6} + \&c.\right)$ qui donnera le logarithme de m dès qu'on connaîtra celui de $m-1$, et qui sera d'autant plus rapide que m sera plus grand.

X.

Déterminer le module pour un système quelconque de logarithmes.

Le logarithme de la base logarithmique étant toujours l'unité ; il est facile de déterminer le *module* pour un système logarithmique autre que celui des logarithmes naturels, et par conséquent de ramener ces derniers au logarithme d'un système quelconque. D'où il suit que pour ramener les logarithmes hyperboliques aux logarithmes tabulaires, il faut multiplier les premiers par la fraction 0, 43429448. &c. ; et réciproquement, pour changer les logarithmes des tables, des logarithmes hyperboliques, il faut multiplier ceux-là par 2, 30258509. &c.

X I.

Pour revenir du logarithme au nombre auquel il appartient ; on réduit la difficulté à trouver le nombre auquel répond un logarithme hyperbolique donné ; et, pour y parvenir on emploie la *méthode inverse des séries*. Nommant n le nombre cherché, on a $n = 1 + Ln + \frac{L^2 n}{1.2.} + \frac{L^3 n}{1.2.3.} + \frac{L^4 n}{1.2.3.4.} +$ &c. expression convergente dans tous les cas, d'où l'on tire en faisant $n = k^z$, $k^z = 1 + zLk + \frac{z^2 L^2 k}{1.2.} + \frac{z^3 L^3 k}{1.2.3.} + \frac{z^4 L^4 k}{1.2.3.4} + \frac{z^5 L^5 k}{1.2.3.4.5.} +$ &c. formule au moyen de laquelle on pourra réduire en série une quantité exponentielle quelconque.

PROBLÈMES.

Trouver la base des logarithmes hyperboliques.

GÉOMÉTRIE.

LA géométrie a pour objet les trois dimensions de l'étendue. Elle considère donc les lignes, les surfaces et les solides.

LIGNES.

I.

Les lignes sont droites ou courbes. Description du cercle et sa division. Deux droites qui se rencontrent forment un angle qui est aigu, droit ou obtus. La grandeur d'un angle est indépendante de la longueur de ses côtés. Les angles opposés au sommet sont égaux. Une ligne qui fait avec une autre deux angles droits lui est perpendiculaire, et réciproquement. La perpendiculaire mesure la distance d'un point à une droite. D'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur cette droite. D'un point pris sur une ligne, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette ligne.

Diviser une ligne donnée en deux parties égales.

Mener d'un point donné hors d'une ligne, une perpendiculaire sur cette ligne.

Elever une perpendiculaire sur un point quelconque d'une ligne donnée.

I I.

Une droite qui a deux de ces conditions, être perpendiculaire à une corde, la couper en deux

Diviser un arc quel-

également et passer par le centre, a nécessairement la troisième. Trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position d'un cercle. Tout rayon est perpendiculaire à la tangente au point de contact, et réciproquement. Si deux ou un plus grand nombre de cercles se touchent en un point, soit en dehors, soit en dedans, la ligne qui passe par leurs centres, passe aussi par leur point de contact.

I I I.

Deux lignes sont parallèles, lorsque leur distance est par-tout la même. Si une droite coupe deux parallèles, les angles alternes-internes sont égaux ; il en est de même des angles alternes-externes et des angles correspondans. D'où il suit que deux angles qui ont leurs côtés parallèles, sont égaux. Deux parallèles qui traversent un cercle, coupent sur sa circonférence deux arcs égaux.

I V.

L'angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. L'angle du segment et l'angle inscrit ont chacun pour mesure la moitié de l'arc compris entre leurs côtés. L'angle excentrique, dont le sommet est au dedans du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre ces mêmes côtés prolongés. L'angle circonscrit, dont les côtés aboutissent à deux points de la circonférence, a pour mesure la différence des arcs convexes et concaves compris entre ses côtés.

V.

Le triangle considéré par rapport à ses côtés est scalène, ou isocèle, ou équilatéral ; consi-

PROBLÈMES.

conque en deux parties égales.

Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés.

Mener une tangente à un point quelconque de la circonférence d'un cercle.

Mener d'un point donné une parallèle à une ligne donnée.

Mener une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne donnée.

D'un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle.

déré par rapport à ses angles, il est rectangle ou obliquangle. Les trois angles d'un triangle valent deux angles droits ; l'angle extérieur de tout triangle est égal à la somme des angles intérieurs opposés. Conséquences qui suivent de ces principes.

PROBLÈMES.

Déterminer de quelle nature doivent être les trois angles d'un triangle quelconque.

V I.

Similitude et égalité des triangles. Deux triangles sont semblables, 1.° lorsqu'ils ont deux angles égaux; 2.° lorsque leurs côtés homologues sont parallèles ; 3.° lorsque les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés homologues de l'autre, ou lorsqu'étant prolongés, ils se rencontrent à angles droits. Si un nombre quelconque de parallèles coupe les côtés d'un angle, les triangles qui en résulteront seront semblables. Deux triangles sont tout à-la-fois égaux et semblables, 1.° lorsqu'ils ont un angle égal et les côtés qui comprennent cet angle, égaux de part et d'autre ; 2.° lorsqu'ils ont un côté égal et les angles adjacens à ce côté égaux chacun à chacun ; 3.° lorsque tous leurs côtés homologues sont égaux. Deux obliques parallèles comprises entre deux autres parallèles, sont égales.

Circonscrire un triangle à un cercle.

V I I.

Les polygones sont irréguliers, ou symétriques ou réguliers. La somme des angles d'un polygone qui n'a pas d'angles rentrans est égale à 180.° multipliés par le nombre de ses côtés moins deux; d'où il est aisé de trouver un angle quelconque d'un polygone régulier. Conséquences qui résultent relativement aux polygones d'un nombre déterminé de côtés.

Déterminer la somme des supplémens des angles intérieurs d'un polygone quelconque qui n'a pas d'angle rentrant.

VIII.

Si de chaque angle d'un polygone symétrique on mène des diagonales aux angles opposés, les triangles opposés aux sommets seront égaux. Chaque diagonale sera divisée au centre en deux parties égales, et le polygone sera partagé en deux parties égales et semblables. Les angles d'un polygone régulier sont d'autant plus obtus que ce polygone a des côtés. Tout polygone régulier peut être inscrit et circonscrit au cercle.

IX.

Lignes proportionnelles. Les parties de deux droites qui font une angle, et qui sont coupées par un nombre quelconque de parallèles, sont proportionnelles entr'elles et aux lignes entières. Deux triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels. Deux triangles qui ont leurs côtés homologues proportionnels sont semblables. Les parties des deux droites qui se coupent entre deux parallèles, sont proportionnelles entre elles. Si on divise un angle d'un triangle quelconque en deux parties égales par une droite, les côtés qui comprennent cet angle seront proportionnels aux segmens faits sur la base.

X.

Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, elle le divisera en deux triangles semblables entr'eux et au triangle total ; elle sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypothénuse, et chaque côté du triangle sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et le segment adjacent à ce côté.

PROBLÈMES.

Décrire un polygone symétrique d'un nombre quelconque de côtés donnés.

Inscrire et circonscrire au cercle un polygone régulier.

Diviser une droite donnée de la même manière qu'une autre est divisée.

Diviser une droite en un nombre quelconque de parties égales.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données.

Diviser une droite en moyenne et extrême raison.

Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. La diagonale du carré est incommensurable avec le côté.

X I.

Si d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle, on mène une perpendiculaire sur le diamètre, elle sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens ou abscisses. Les parties de deux cordes qui se coupent dans un cercle, sont réciproquement proportionnelles. Les parties extérieures de deux sécantes menées d'un même point hors la circonférence d'un cercle, sont réciproquement proportionnelles aux sécantes entières. La tangente d'un cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

X I I.

Figures semblables. Si deux figures sont semblables, le périmètre de la première est au périmètre de la seconde, comme un nombre quelconque de côtés de la première est au même nombre des côtés homologues de la seconde. En général, les figures semblables ont leurs dimensions homologues proportionnelles.

S u r f a c e s.

X I I I.

La mesure la plus naturelle des surfaces est un carré que l'on prend pour unité de surface. La surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur; celle d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par

PROBLÈMES.

Par un point pris dans l'intérieur d'un cercle, mener une corde égale à une droite donnée.

Décrire un polygone semblable à un polygone donné.

Réduire une figure rectiligne quelconque, à une autre figure qui lui soit égale en surface, et qui ait un angle de moins.

sa hauteur; celle d'un trapèze au produit de la demi-somme de ses bases par la perpendiculaire qui en mesure la distance; celle d'un polygone régulier à la moitié du produit du périmètre multiplié par le rayon du cercle inscrit; celle d'un cercle à la moitié du produit de la circonférence par son rayon.

X I V.

Les surfaces des triangles sont en raison composées de leurs bases et de leurs hauteurs. Les surfaces de deux triangles de mêmes bases sont comme leurs hauteurs; elles sont comme les bases lorsque les hauteurs sont égales. Si les bases sont en raison inverse des hauteurs, leurs surfaces sont égales. Les surfaces de deux figures semblables sont entr'elles comme les carrés de leurs côtés homologues ou de leurs dimensions homologues.

X V.

Le plan est parmi les surfaces ce que la droite est parmi les lignes. Une droite qui a deux points communs avec un plan est toute entière dans ce plan. On ne peut mener d'un même point, hors d'un plan, qu'une perpendiculaire sur ce plan. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entr'elles. L'intersection de deux plans est une ligne droite. Trois points, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan. Deux droites qui se coupent sont dans le même plan. L'inclinaison de deux plans est mesurée par l'angle que forment deux lignes, l'une dans un plan, l'autre dans l'autre, tirées sur un même point perpendiculairement à l'intersection de ces deux plans. Si un plan coupe plusieurs plans

PROBLÈMES.

Trouver un triangle égal en surface à un polygone régulier.

Trouver la surface d'un cercle dont le diamètre est connu.

Trouver une figure égale à la somme ou à la différence de tant de figures semblables qu'on voudra, et qui leur soit en même temps semblable.

Trouver une figure semblable, à une figure donnée, qui soit avec elle dans le rapport de m à n.

parallèles, les droites qui naîtront de leurs intersections seront parallèles.

Solides.

X V I.

On mesure les angles solides en prenant la somme des angles plans qui les forment. Il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide. Formation et génération des solides, qui prennent différens noms suivant le polygone générateur. La surface d'un prisme droit, et parconséquent celle d'un cylindre droit, est égale au produit du contour de sa base par sa hauteur, ou par la distance de ses bases parallèles. Celle d'une pyramide régulière est égale à la moitié du périmètre du polygone qui lui sert de base par son apothème. Il en est de même de celle du cône droit. La surface d'une pyramide tronquée droite, ainsi que celle du cône droit tronqué, est égale au produit de ce qui reste de l'apothème, par le contour de l'élément moyen proportionnel entre ceux des bases supérieure et inférieure. La surface d'un sphéroïde quelconque, est égale au produit de son axe par la circonférence du cercle auquel il est circonscrit, et par conséquent celle de la sphère est égale au produit de son axe par la circonférence d'un de ses grands cercles. Celle d'une calotte sphérique est égale au produit de son épaisseur, par la circonférence d'un des grands cercles de la sphère dont elle fait partie. Les surfaces des solides semblables sont entr'elles comme les carrés de leurs dimensions homologues.

Mesurer la surface d'un solide proposé.

Déterminer le rapport de la surface de la sphère à celle d'un de ses grands cercles.

Déterminer le rapport de la surface de la sphère à la surface latérale, et à la surface totale du cylindre circonscrit.

X V I I.

Le cube est la mesure naturelle des solidités.

La solidité d'un parallélipipède rectangle est égale au produit de la surface de sa base par sa hauteur ; celle d'un prisme quelconque droit ou oblique, est égale au produit de sa base, par la perpendiculaire abaissée d'un des points de sa base supérieure sur sa base inférieure prolongée s'il est nécessaire ; il en est de même de celle du cylindre. La solidité d'une pyramide est le tiers de celle du prisme de même base et de même hauteur ; celle du cône est aussi le tiers de celle du cylindre qui lui est circonscrit. La solidité d'un polyèdre régulier est égale au produit du rayon de la sphère à laquelle on le conçoit circonscrit par le tiers de sa surface ; d'où il suit que celle de la sphère est égale au tiers de sa surface multipliée par son rayon.

XVIII.

Les solidités des solides sont en raison composées de leurs produisans. Si deux solides ont une dimension égale, leurs solidités sont entre elles comme le produit des deux autres dimensions. Deux solides dont les bases sont en raison inverse de leurs hauteurs, sont égaux en solidité. Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs dimensions homologues.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

I.

La Trigonométrie est l'art de résoudre ce problème général des trois angles et des trois côtés d'un triangle, trois choses étant données, du nombre desquelles soit un côté, trouver le reste.

PROBLÈMES.

Trouver la solidité du cône tronqué.

Déterminer le rapport de la solidité de la sphère à celles du cylindre circonscrit et du cône de même base et de même hauteur.

Déterminer la solidité d'une calotte sphérique.

Trouver le rapport d'un solide connu à celui d'un solide semblable dont on connaît une dimension.

* *Mesurer une hauteur accessible ou inaccessible.*

Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutend un arc double. Dans tout triangle les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles. La somme de deux côtés quelconques d'un triangle, est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles.

I I.

Supposant le rayon $= 1$, on a généralement $\mathit{sin.}^2 A + \mathit{cos.}^2 A = 1$; $\mathit{tang.}\ A = \frac{\mathit{sin.}\ A}{\mathit{cos.}\ A}$; $\mathit{cosec.}\ A = \frac{\mathit{cos.}\ A}{\mathit{sin.}\ A}$; $\mathit{sec.}\ A = \frac{1}{\mathit{cos.}\ A}$; $\mathit{cosec.}\ A = \frac{1}{\mathit{sin.}\ A.}$

$$\mathit{sin.}\,(a + b) = \mathit{sin.}\ a\ \mathit{cos.}\ b + \mathit{sin.}\ b\ \mathit{cos.}\ a.$$
$$\mathit{sin.}\,(a - b) = \mathit{sin.}\ a\ \mathit{cos.}\ b - \mathit{sin.}\ b\ \mathit{cos.}\ a.$$
$$\mathit{cos.}\,(a + b) = \mathit{cos.}\ a\ \mathit{cos.}\ b - \mathit{sin.}\ a\ \mathit{sin.}\ b.$$
$$\mathit{cos.}\,(a - b) = \mathit{cos.}\ a\ \mathit{cos.}\ b + \mathit{sin.}\ a\ \mathit{sin.}\ b.$$
$$\mathit{tang}\,(a + b) = \frac{\mathit{tang.}\ a + \mathit{tang.}\ b}{1 - \mathit{tang.}\ a\ \mathit{tang.} b}$$
$$\mathit{tang.}\,(a - b) = \frac{\mathit{tang.}\ a - \mathit{tang.}\ b.}{1 + \mathit{tang.}\ a\ \mathit{tang.}\ b.}$$
$$\mathit{cot.}\,(a + b) = \frac{\mathit{cot.}\ a\ \mathit{cot.}\ b - 1}{\mathit{cot.}\ a + \mathit{cot.}\ b.}$$
$$\mathit{cot.}\,(a - b) = \frac{\mathit{cot.}\ a\ \mathit{cot.}\ b + 1.}{\mathit{cot.}\ b - \mathit{cot.}\ a.}$$
$$\mathit{sec.}\,(a + b) = \frac{\mathit{sec.}\ a\ \mathit{sec.}\ b}{1 - \mathit{tang.}\ a\ \mathit{tang.}\ b.}$$
$$\mathit{sec.}\,(a - b) = \frac{\mathit{sec.}\ a\ \mathit{sec.}\ b.}{1 + \mathit{tang.}\ a\ \mathit{tang.}\ b.}$$
$$\mathit{cosec.}\,(a + b) = \frac{\mathit{cosec.}\ a\ \mathit{cosec}\ b.}{\mathit{cot.}\ b + \mathit{cot.}\ a.}$$
$$\mathit{cosec.}\,(a - b) = \frac{\mathit{cosec.}\ a\ \mathit{cosec.}\ b.}{\mathit{cot.}\ b - \mathit{cot.}\ a.}$$

On tire de ces formules, les formules suivantes qui peuvent être très-utiles dans certains cas.

sin.

PROBLÈMES.

Lever la carte d'un pays.

Indiquer de quelle manière on doit s'y prendre pour calculer et construire une table de sinus tangentes, &c.

$$\sin. p + \sin. q = 2 \sin. \left(\frac{p+q}{2}\right) \cos. \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin. p - \sin. q = 2 \sin. \left(\frac{p-q}{2}\right) \cos. \left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \left(\frac{p+q}{2}\right) \cos. \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos. q - \cos. p = 2 \sin. \left(\frac{p+q}{2}\right) \sin. \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$1 + \sin. q = 2 \sin.^2 \left(45^\circ + \tfrac{1}{2} q\right)$$

$$1 - \sin. q = 2 \cos.^2 \left(45^\circ + \tfrac{1}{2} q\right)$$

$$1 + \cos. p = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} p.$$

$$1 - \cos. p = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} p.$$

SECTIONS CONIQUES.

Notions générales sur les courbes. Pour décrire une courbe, on rapporte chacun de ses points à l'axe des abscisses et à celui des ordonnées ; on cherche ensuite le rapport qui se trouve entre les abscisses et les ordonnées, et l'expression analytique de ce rapport, donne l'équation de la courbe, d'après laquelle on découvre ses différentes propriétés. Une courbe est géométrique ou transcendante. Le cours de ses branches est fini ou infini, elle peut avoir des points multiples, des points d'inflexion et des points de rebroussement.

I I.

Si on coupe un cône droit ou oblique par un plan quelconque, auquel on donne différentes positions, on aura des sections ou courbes, connues sous le nom de *sections coniques*, dont l'équation générale sera en appelant, A, B, C, les angles que forment entr'eux les côtés du cône et le diamètre de sa base, c la distance du sommet du cône au plan coupant à l'origine des coordonnées,

$$y = \frac{\sin. A}{\sin. C \sin. D}\left(cx \sin. B - xx \sin.(A+B)\right)$$

Cette équation générale présente trois cas qui donnent trois équations particulières entre x et y, dont l'une exprime une courbe qui a deux branches infinies et qu'on nomme parabole, la seconde une courbe rentrante qu'on appelle élipse, qui contient aussi le cercle; la troisième une courbe qui a quatre branches infinies qu'on appelle hyperbole.

I I I.

Dans la parabole rapportée à son axe, dont le paramètre est p, on a $y^2 = p x$. L'ordonnée qui passe par le foyer, est égale à la moitié du paramètre; la distance d'un point quelconque de cette courbe à la directrice, est égale à la distance de ce même point au foyer. La soutangente $= 2x$, la tangente $= \sqrt{px + 4xx}$; la sounormale $= \frac{1}{2}p$; la normale $= \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$.

Si on rapporte cette courbe à un diamètre quelconque dont le paramètre est q, on aura $\overset{1}{y} = q\overset{1}{x}$.

I V.

Appelant a et b le premier et le second demi-axe de l'élipse on a, en comptant les abscisses du sommet $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. si les abscisses sont comptées du centre, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(a^2 - x^2)$ il suit de ces équations que les ordonnées de l'élipse

PROBLÈMES.

Développer la demonstration de cette formule, et en déduire les différens cas qui se présentent pour les différentes positions du plan.

Mener d'un point donné sur la parabole une tangente à cette courbe.

L'axe d'une parabole étant donné avec son paramètre, trouver un diamètre qui fasse, avec ses ordonnées, un angle donné.

Le paramètre d'un diamètre étant donné avec l'origine de ce diamètre et l'angle qu'il fait avec ses ordonnées, trouver l'axe, son origine et son paramètre.

sont proportionnelles aux ordonnées d'un cercle décrit sur le grand axe, et que le cercle n'est qu'une élipse dont les axes sont égaux. Le demi petit axe est moyen proportionnel entre les distances de l'un des foyers aux deux sommets de l'élipse. Le paramètre du grand axe qui est égal au double de l'ordonnée qui passe par le foyer $= \frac{4bb}{2a}$, et celui du petit axe $= \frac{4a^2}{2b}$. D'où l'on tire les deux nouvelles équations de la courbe $y^2 = px - \frac{pxx}{2a}$ et $y'^2 = \frac{pa}{2} - \frac{px''x''}{2a}$, les abscisses étant comptées du sommet ou du centre. La somme des rayons vecteurs est toujours égale au grand axe.

Décrire une élipse.

V.

Mener par un point donné de l'élipse une tangente à cette courbe.

Les angles formés sur la tangente en un point quelconque de l'élipse par les rayons vecteurs tirés des deux foyers, sont égaux. Dans cette courbe, la sounormale $= \frac{bbx}{aa}$. La normale $= \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^4}(a^2 - b^2)}$; la soutangente $= \frac{a^2 - x^2}{x}$ la tangente $= \sqrt{(a^2 - x^2)\left(\frac{bb}{aa} + \frac{a^2 - x^2}{x^2}\right)}$

La distance du centre au point où le grand axe rencontre la tangente $= \frac{a^2}{x}$; la distance du sommet au même point $= \frac{a}{x}(a - x)$. On peut facilement faire entrer dans ces formules l'expression du paramètre et les rapporter à l'origine de la courbe.

PROBLÈMES.

V I.

Diamètres conjugués de l'élipse. Paramètres de ces diamètres. Si des extrémités de deux diamètres conjugués, on abaisse du même côté deux perpendiculaires au grand axe, les triangles formés par ces perpendiculaires, les deux demi-diamètres conjugués et les parties du grand axe depuis le centre, seront égaux en surface, la somme des carrés des parties de l'axe depuis le centre jusqu'à ces perpendiculaires est égale au carré du demi-grand axe; et la somme des carrés de ces perpendiculaires est égale au carré du demi-petit axe. La somme des carrés des deux diamètres conjugués quelconques de l'élipse, est égale à la somme des carrés des deux axes. La surface du parallélogramme formé par les diamètres conjugués, est constante et égale au rectangle des axe. L'élipse a toujours deux diamètres conjugués égaux. Si m et n sont deux diamètres conjugués, on a $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$. Tout diamètre divise l'élipse en deux parties égales, et est divisé en deux également au centre.

Étant donnés les deux demi-axes d'une élipse, trouver deux diamètres qui fassent entr'eux un angle donné.

Les deux diamètres et l'angle qu'ils font entre eux étant donnés, trouver les deux axes et leur direction.

V I I.

a et b étant les deux demi-axes de l'hyperbole, on a pour son équation, en comptant les abscisses du sommet $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$. Si les abscisses sont comptées du centre, on a $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$. Si $a = b$ l'hyperbole est équilatère. Le demi-petit axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les deux distances de l'un des foyers aux deux sommets. Le paramètre du

Décrire une hyperbole.

grand axe égal au double de l'ordonnée qui passe par le foyer $= \frac{4bb}{2a}$ et celui du petit axe $= \frac{4a^2}{2b}$ d'où l'on tire les deux nouvelles équations de la courbe $y^2 = px + \frac{pxx}{2a}$ et $y'^2 = \frac{px''x}{2a} - \frac{pa}{2}$. Les abscisses étant comptées du sommet ou du centre. La différence des rayons vecteurs est toujours égale au grand axe.

VIII.

Les angles formés de chaque côté de la tangente en un point quelconque de l'hyperbole par les rayons vecteurs tirés des deux foyers, sont égaux dans cette courbe. La sounormale $= \frac{bbx}{aa}$; la normale $= \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a^4}(a^2 + b^2) - b^2}$ la soutangente $= \frac{x^2 - a^2}{x}$; la tangente $= \sqrt{(x^2 - a^2)\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{x^2 - a^2}{x^2}\right)}$; la distance du centre au point ou le premier axe rencontre la tangente $= \frac{a^2}{x}$, la distance du sommet au même point $= \frac{a}{x}(x - a)$. On peut, comme dans l'élipse, faire entrer dans ces formules l'expression du paramètre, et les rapporter au sommet de la courbe.

IX.

Les asymptotes de l'hyperbole sont les limites de ses tangentes. La perpendiculaire a l'axe au

PROBLÈMES.

Mener par un point donné de l'hyperbole, une tangente à cette courbe.

sommet de la courbe jusqu'à la rencontre de la tangente $= b \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$. L'équation de l'hyperbole entre ses asymptotes est $xy = m^2$, m étant la moitié de la diagonale du rectangle formé par les axes. Si plusieurs lignes parallèles coupent une hyperbole, et aboutissent aux asymptotes, les produits de chaque partie comprise entre l'asymptote et la courbe par l'autre partie sont égaux. Les parties de chacune de ces lignes comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales. La tangente terminée aux asymptotes est divisée en deux également au point de contact.

PROBLÈMES.

Une hyperbole étant donnée avec son axe. Déterminer la position des asymptotes.

Décrire une hyperbole entre deux asymptotes données, et qui passe par un point donné.

X.

Diamètres conjugués de l'hyperbole, paramètres de ces diamètres. Si des extrémités des deux diamètres on baisse du même côté deux perpendiculaires sur le premier axe, les triangles formés par ces perpendiculaires, les deux diamètres et les parties de l'axe depuis le centre, seront égaux en surface, la différence des carrés des parties de l'axe depuis le centre jusqu'à ces perpendiculaires, est égale au carré du demi-grand axe, et la différence des carrés de ces perpendiculaires, est égale au carré du demi-petit-axe. La différence des carrés des deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole est égale à la différence des carrés des deux axes. Le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est d'une surface constante et toujours égale à celle du rectangle des axes.

Etant donnés les deux demi axes d'une hyperbole, trouver deux diamètres qui fassent entre eux un angle donné.

Etant donnés les deux diamètres conjugués d'une hyperbole et l'angle qu'ils font entr'eux, trouver les deux axes et leur direction.

Si m et n sont deux diamètres conjugués, on a $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ Un diamètre divise toutes ses ordonnées en parties égales et est divisé en deux également au centre.

RÉPONDRONT:

LES CITOYENS

AUGUSTE MAZERAT, *de la Commune de Nontron.*

ANTOINE PEYSSARD, *de la Commune de Périgueux.*

JEAN DELAY, *de Bergerac.*

N. DELAGE, *de la Commune de Villars.*

PIERRE DUBOIS, *de Périgueux.*

Élèves de Mathématiques.

TAMARELLE-LAGRAVE,
Professeur.