ESSAI

DE MATHÉMATIQUES,

A L'ÉCOLE CENTRALE

DU DÉPARTEMENT DE LA DORDOGNE,

Le 1.er Fructidor, an VII de la République française, dans la Salle Décadaire, à trois heures après-midi.

A PÉRIGUEUX,

Chez L. Canler, Imprimeur du Département et de l'École centrale, restant à la ci-devant petite Mission.

An VII.e de la République.

ESSAI DE MATHÉMATIQUES, A L'ÉCOLE CENTRALE DU DÉPARTEMENT DE LA DORDOGNE.

CALCUL.

I.

COMME les opérations qu'il faut faire pour obtenir la puissance ou la racine d'une quantité algébrique quelconque, sont d'autant plus compliquées, que le rang de cette puissance ou de cette racine est plus élevé ; on emploie la formule générale de Newton, $(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \ldots$ &c. Au moyen de laquelle on élève un polynome quelconque, à une puissance quelconque, ou on en extrait la même racine exacte ou approchée.

II.

Les séries ou suites sont finies ou infinies, convergentes ou divergentes. La méthode des coefficiens indéterminés, est d'un grand usage dans le calcul des séries. Elle a pour but principal de faire connaître la suite des termes que l'on peut déduire de certaines quantités algébriques, en fournissant autant d'équations particulières que des coefficiens indéterminés, au moyen desquelles on trouve la valeur de chaque coeffi-

PROBLÈMES.

Développer la démonstration de la formule du bynome, et en faire quelques applications.

Développer la méthode des coefficiens indéterminés, et l'appliquer à des exemples.

cient. On obtient par cette méthode la valeur approchée d'une expression algébrique fractionnaire, ou la racine approchée d'une quantité quelconque.

PROBLÈMES.

I I I.

La plus utile des opérations à faire sur les suites, consiste à les sommer. Elle se borne, pour ainsi dire, à trouver la méthode d'en sommer quelques-unes qui servent de formules auxquelles on ramène, s'il est possible, les suites qu'on veut ommer ; c'est ainsi qu'on parvient à sommer la suite $\frac{a}{b} + \frac{a + d}{bq} + \frac{a \; + \;}{bq^2} + \frac{a + 3d}{bq^3} + \&c.$ dont la somme est $\frac{aq^2 - aq + dq}{bq^2 - 2bq + b}$. Lorsqu'on ne peut sommer en termes finis une suite infinie, on tâche de la mettre sous une forme rapidement convergente.

Déterminer en fraction ordinaire, la valeur d'une fraction périodique infinie.

I V.

Il est quelquefois utile ou nécessaire d'avoir la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite ou progression quelconque de puissances des nombres naturels, appellant a le premier terme, q le dernier, s la somme des termes, m un exposant servant à désigner les différentes puissances, on aura $q^m = a^m + m \left(s^{m-1} - q^{m-1}\right) + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2.} \left(s^{m-2} - q^{m-2}\right) + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1. \; 2 \; 3} \left(s^{m-3} - q^{m-3}\right) + \&c.$ Expression qui donnera par de simples substitutions la somme de toutes les puissances de tant de nombres naturels qu'on voudra.

Développer la démonstration de cette formule, et en faire des applications.

V.

On peut traiter les série sous un rapport aussi simple et plus avantageux, en considérant l'expression algébrique de chaque terme sous une forme générale qu'on appelle *terme général*, qui offre, par simple substitution, un terme quelconque de la série, pour tâcher d'en trouver ensuite la *somme générale*, ou le terme sommatoire qui donne généralement la somme d'un nombre quelconque de termes de la série. Quoique cette manière d'envisager les suites présente beaucoup de difficultés, elle offre tant d'avantages dans ses applications, qu'on ne peut trop s'attacher à la perfectionner.

Etant donné le terme sommatoire d'une série, indiquer comment on trouve son terme général.

V I.

La somme générale d'une série étant donnée, il est aisé d'en trouver le terme général ; mais il n'est n'est pas aussi facile de trouver la somme générale lorsque le terme général est donné. Et il est très-peu de cas où ce problême puisse être résolu. T étant une fonction rationnelle d'un nombre n de termes, ensorte que le terme général soit exprimé par $T = an^{m} + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} + \ldots k$. on aura pour la somme de la série auquel il appartient $S = \frac{a}{m+1} n^{m+1} + \left[\frac{m}{b} + \frac{1}{2} a\right] n^{m} + \left[\frac{c}{m-1} + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} am\right] n^{m-1} +$ &c. qui donne dans un cas assez étendu la somme de la série, et par conséquent la solution du problème.

Développer la démonstration de cette formule, et en faire des applications particulières.

V I I.

La méthode inverse des séries qu'on appelle aussi *retour des suites*, est une des plus utiles de l'analyse. C'est par l'usage des coefficiens indéterminés qu'on parvient à la démontrer et à la pratiquer. Elle est tout à la fois exacte et commode, et trouve son application dans une infinité de parties mathématiques.

PROBLÈME : *Étant donnée l'équation* $x = y^{m} + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n}$ & *trouver la valeur de* y.

VIII.

Invention des logarithmes. Leur nature déduite des progressions géométriques. Tout système logarithmique dépend de la base qu'on choisit. Système des tables ordinaires. Idées des travaux de ceux qui ont construit des tables de logarithmes. Quelque système qu'on choisisse, on a généralement $L\,1 = o$, $L.\,ab = L\,a + L\,b.$; $L.\,\frac{a}{b} = La - Lb$; $L.\,a^{m} = m\,L\,a$; $L.\,\sqrt[n]{(a^{3} + x^{3})^{m}} = \frac{m}{n} L.\,(a - x) + \frac{m}{n} L\,(a^{2} + ax + x^{2})$; $L\,z^{3} + \frac{3}{4} L\,z = L.\,(z^{3} \sqrt{z^{3}})$ &c. Les logarithmes peuvent être d'un grand usage dans la résoluion de plusieurs équations qui paraissent échapper aux règles de l'algèbre ordinaire, si $c = \frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}$ on aura $x = \frac{Lc - Lb}{m\,La - n\,Lb.}$; si $a^{x} = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$ on aura $x = \frac{L.\,b^{n}}{L\left(\frac{b^{m}}{ac^{q}}\right)}$; enfin si $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$; on aura, $x^{2}\,L\,c^{m}f - a\,L\,b^{n}fp = -L\,b^{a}$. D'où il est facile de tirer la valeur de x en résolvant l'équation.

S'il y a cent mille habitans dans un département, et que la population y augmente tous les ans de la trentième partie, quel sera le nombre des habitans au bout d'un siècle.

Quelle est la quantité dont il faudrait qu'un peuple s'accrut tous les ans, pour être deux fois plus nombreux à la fin de chaque siècle.

I X.

Les premiers calculateurs des tables avaient dejà fini leurs calculs, lorsqu'on inventa des méthodes pour les simplifier. Parmi ces méthodes celle des suites a mérité l'attention des géomètres par la rapidité de sa marche. Suivant les principes de cette méthode, l'expression générale du logarithme de $1 \pm x$ est $L(1 \pm x) = A(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \frac{x^7}{7} -$ &c.

D'où il suit qu'un même nombre peut avoir une infinité de logarithmes. Supposant le module $A = 1$ on aura les logarithmes naturels ou de *Néper*, qu'on appelle aussi logarithmes hyperboliques.

PROBLÈMES.

Développer la démonstration de cette formule.

X.

Appliquer ces formules à la recherche du logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque.

On tire de la formule précédente, en supposant $A = 1$, $L.\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = \frac{2y}{a}\left(1 + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{y^4}{5a^4} + \frac{y^6}{7a^6} + \text{\&c.}\right)$ Série toujours convergente y étant plus petit que a au moyen de laquelle il serait facile d'avoir le logarithme naturel d'une quantité quelconque. Cette série fournit encore celle-ci. $L\,m = L(m-1) + .\frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \frac{1}{7(2m-1)^6} + \text{\&c.}\right)$ qui donnera le logarithme de m dès qu'on connaîtra celui de $m-1$, et qui sera d'autant plus rapide que m sera plus grand.

I X.

Déterminer le module pour un système quelconque de logarithmes.

Le logarithme de la base logarithmique étant toujours l'unité, il est facile de déterminer le *module* pour un système logarithmique autre que celui des logarithmes naturels, et par conséquent de ramener ces derniers au logarithme d'un système quelconque. D'où il suit que pour ramener les logarithmes hyperboliques aux logarithmes tabulaires, il faut multiplier les premiers par la fraction 0, 43429448. &c.; et réciproquement, pour changer les logarithmes des tables, des logarithmes hyperboliques, il faut multiplier ceux-là par 2, 30258509. &c.

PROBLÈMES.

XII.

Trouver la base des logarithmes hyperboliques.

Pour revenir du logarithme au nombre auquel il appartient; on réduit la difficulté à trouver le nombre auquel répond un logarithme hyperbolique donné; et, pour y parvenir on emploie la *méthode inverse des séries*. Nommant n le nombre cherché, on a $n = 1 + Ln + \frac{L^2 n}{1.2.} + \frac{L^3 n}{1.2.3.} + \frac{L^4 n}{1.2.3.4.} + \&c.$ expression convergente dans tous les cas, d'où l'on tire en faisant $n = k^z$, $k^z = 1 + zLk + \frac{z^2 L^2 k}{1.2.} + \frac{z^3 L^3 k}{1.2.3.} + \frac{z^4 L^4 k}{1.2.3.4} + \frac{z^5 L^5 k}{1.2.3.4.5.} + \&c.$ formule au moyen de laquelle on pourra réduire en série une quantité exponentielle quelconque.

Construction géométriques.

Inscrire un carré dans un triangle donné.

Les constructions géométriques sont une des parties les plus importantes de l'application de l'algèbre à la géométrie. Elles ont lieu relativement aux équations algébriques où l'inconnue peut être déterminée en lignes. L'équation peut être linéaire ou du premier degré, quadratique ou du second degré, cubique ou troisième degré, &c. &c. &c. Dans le premier cas, l'inconnue

n'a

n'a qu'une valeur qu'on détermine par l'intersection des lignes droites ; dans le second cas, elle a deux valeurs qu'on trouve par l'intersection du cercle et de la ligne droite ; dans les autres cas, elle a trois, quatre, &c. valeurs qu'on détermine par l'intersection de différentes courbes, dont le choix et l'usage, quoique difficiles, peuvent donner beaucoup d'élégance à la construction. Cette manière de considérer les équations algébriques, forme une branche d'analyse, aussi intéressante qu'utile, à laquelle les géomètres, depuis Descartes, se sont attachés avec succès. Pour parvenir à l'équation qui résout un problème, il faut examiner attentivement les conditions de ce problème, exprimer ces conditions par des équations d'où l'on puisse tirer l'équation finale. Construction géométrique de plusieurs équations algébriques déterminées du premier et du second degré.

PROBLÈMES.

Mener d'un point donné hors de deux parallèles une droite, de manière que la partie interceptée par ces parallèles, soit égale à une ligne donnée.

Décrire un cercle qui passe par deux points donnés et qui touche une droite donnée de position.

Couper une ligne en moyenne et extrême raison.

Théorie des Sinus.

I.

Supposant le rayon $=1$, on a généralement $\text{sin.}^2 A + \text{cos.}^2 A = 1$; $\text{tang.}\, A = \frac{\text{sin.}\, A}{\text{cos.}\, A}$; $\text{cot.}\, A = \frac{\text{cos.}\, A}{\text{sin.}\, A}$; $\text{sec.}\, A = \frac{1}{\text{cos.}\, A}$; $\text{cosec.}\, A = \frac{1}{\text{sin.}\, A}$.

$$\text{sin.}(a \pm b) = \text{sin.}\, a\, \text{cos.}\, b \pm \text{sin.}\, b\, \text{cos.}\, a.$$

$$\text{cos.}(a \pm b) = \text{cos.}\, a\, \text{cos.}\, b \mp \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b.$$

$$\text{tang.}(a \pm b) = \frac{\text{tang.}\, a \pm \text{tang.}\, b.}{1 \mp \text{tang.}\, a\, \text{tang.}\, b}$$

$$\text{cot.}(a \pm b) = \frac{\text{cot.}\, a\, \text{cot.}\, b \mp 1}{\text{cot.}\, b \pm \text{cot}\, a.}$$

$$\text{sec.}\,(a \pm b) = \frac{\text{sec. } a \text{ sec. } b}{1 \mp \text{tang. } a \text{ tang. } b.}$$

$$\text{cosec.}\,(a \pm b) = \frac{\text{cosec. } a \text{ cosec } b.}{\text{cot. } b \pm \text{cot. } a.}$$

On tire de ces formules, les formules suivantes qui peuvent être très-utiles dans certains cas.

$$\text{sin. } p + \text{sin. } q = 2\,\text{sin.}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{cos.}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{sin. } p - \text{sin. } q = 2\,\text{sin.}\left(\frac{p-q}{2}\right)\text{cos.}\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\text{cos. } p + \text{cos. } q = 2\,\text{cos.}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{cos.}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{cos. } p - \text{cos. } q = 2\,\text{sin.}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sin.}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$1 + \text{sin. } q = 2\,\text{sin.}^2\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}q\right)$$

$$1 - \text{sin. } q = 2\,\text{cos.}^2\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}q\right)$$

$$1 + \text{cos. } p = 2\,\text{cos.}^2\,\tfrac{1}{2}p.$$

$$1 - \text{cos. } p = 2\,\text{sin.}^2\,\tfrac{1}{2}p.$$

II.

Développer les valeurs de s, s'', s''', &c. pour un nombre n d'arcs égaux.

En remontant aux formules précédentes, on en découvre d'autres qui forment des séries propres à simplifier le travail du calcul des tables des sinus.

A, B, C, D, &c. étant un nombre d'arcs quelconques, on aura, en nommant s la somme de leurs tangentes, s'' leurs produits deux à deux, s''' leurs produits trois à trois, s^{IV} leurs produits quatre à quatre, &c.

$$\text{tang. }(A + B + C + D + \&c.) = \frac{s - s''' + s^{V} - s^{VII} + \&c.}{1 - s'' + s^{IV} - s^{VI} + \&c.}$$

d'où on peut tirer facilement la valeur de *tang.* n A en fonctions de *tang.* A.

III.

On a aussi pour l'expression du *sinus* et du *cosinus* d'un angle multiple de A ; $\textit{sin.}\ A =$

$$n \cos.^{n-1} A \sin. A - \frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3.} \cos.^{n-3} A \sin^3 A$$

$$+ \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} \cos.^{n-5} A \sin.^5 A + \&c.$$

$$\cos. n A = \cos.^n A - \frac{n.\ n-1.}{1.\ 2.} \cos.^{n-2} A \sin.^2 A.$$

$$+ \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cos.^{n-4} A \sin.^4 A - \&c.$$

formules qui donnent les séries suivantes :

$$\sin. a = a - \frac{a^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \&c.$$

$$\cos. a = 1 - \frac{a^2}{1.\ 2} + \frac{a^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} - \frac{a^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c.$$

au moyen desquelles on pourra calculer d'une manière prompte et facile, les sinus, cosinus, tangentes, cotangentes &c. d'un arc quelconque donné en parties du rayon.

Appliquer ces formules à la recherche du sinus ou cosinus, d'un arc quelconque moindre que le quart de la circonférence, et les rapporter au rayon des tables.

IV.

Si au lieu de connaître l'arc a en parties de rayons $= 1$, on connaît le sinus, ou le cosinus, ou la tangente &c., de cet arc en parties du même rayon, on aura, en employant le retour des suites,

$$a = \sin. a + \frac{\sin.^3 a}{1.\ 2.\ 3} + \frac{\sin.^5 a}{1.2.3.4.5} + \frac{\sin.^7 a}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

$$a = \tan g. a - \frac{\tan g.^3 a}{3} + \frac{\tan g.^5 a}{5} - \frac{\tan g.^7 a}{7} + \&c.$$

séries qui donneront un arc quelconque de la circonférence du cercle dont on a le sinus ou la tangente.

Appliquer ces formules à la recherche de l'expression de la demi-circonférence du cercle.

V.

e étant la base des logarithmes naturels ou hyperboliques, on a ces autres expressions relatives au sinus et au cosinus de l'arc a qu'on peut employer utilement dans certains cas.

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos. a + \sqrt{-1} \sin. a$$

$$e^{a-\sqrt{-1}} = \cos. a - \sqrt{-1} \sin. a.$$

d'où l'on tire pour les valeurs du sinus et du cosinus

$$\sin. a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos. a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2.}$$

et pour celle de l'arc a.

$$a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L. \left[\frac{1 + \sqrt{-1}\ \text{tang.}\ a}{1 - \sqrt{-1}\ \text{tang.}\ a.}\right]$$

On peut donc ramener les quantités exponentielles imaginaires aux sinus et cosinus d'arcs réels et les logarithmes imaginaires aux mêmes arcs.

V I.

La théorie des sinus fournit une méthode bien simple de résoudre, par approximation, toute équation du troisième degré $x^3 - px + q = 0$ dans le cas irréductible, à laquelle on peut facilement ramener celle du même cas où q est négatif. Car, R étant le rayon des tables et a l'arc auquel répond la quantité $\frac{3 R q \sqrt{3}}{2 p \sqrt{p}}$ cherchée parmi les sinus tabulaires, les trois racines seront, en rapportant les sinus qui entrent dans leur expression au rayon $= 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R} \sin. \frac{1}{3} a$, $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R} \sin. [60^\circ - \frac{1}{3} a]$, $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R} \sin. [60^\circ + \frac{1}{3} a]$.

PROBLÈMES.

Déterminer la nature et l'expression des logarithmes des quantités négatives.

Développer l'analyse des opérarions qu'il faut faire, et en donner des applications particulières.

PROBLÈMES.

SECTIONS CONIQUES.

Notions générales sur les courbes. Pour décrire une courbe, on rapporte chacun de ses points à l'axe des abscisses et à celui des ordonnées ; on cherche ensuite le rapport qui se trouve entre les abscisses et les ordonnées, et l'expression analytique de ce rapport, donne l'équation de la courbe, d'après laquelle on découvre ses différentes propriétés. Une courbe est géométrique ou transcendante. Le cours de ses branches est fini ou infini, elle peut avoir des points multiples, des points d'inflexion et des points de rebroussement.

I I.

Si on coupe un cône droit ou oblique par un plan quelconque, auquel on donne différentes positions, on aura des sections ou courbes, connues sous le nom de *sections coniques*, dont l'équation générale sera, en appelant, A, B, C, les angles que forment entr'eux les côtés du cône et le diamètre de sa base, c la distance du sommet du cône au plan coupant à l'origine des coordonnées,

$$y^2 = \frac{\sin. A}{\sin. C \sin. D}\left(cx \sin. B - xx \sin.(A+B)\right)$$

Développer la demonstration de cette formule, et en déduire les différens cas qui se présentent pour les différentes positions du plan.

Cette équation générale présente trois cas qui donnent trois équations particulières entre x et y, dont l'une exprime une courbe qui a deux branches infinies et qu'on nomme parabole, la seconde une courbe rentrante qu'on appelle élipse, qui contient aussi le cercle ; la troisième une courbe qui a quatre branches infinies qu'on appelle hyperbole.

I I I.

Dans la parabole rapportée à son axe, dont le paramètre est p, on a $y^2 = px$. L'ordonnée qui passe par le foyer, est égale à la moitié du paramètre ; la distance d'un point quelconque de cette courbe à la directrice, est égale à la distance de ce même point au foyer. La soutangente $= 2x$, la tangente $= \sqrt{px + 4xx}$; la sounormale $= \frac{1}{2}p$; la normale $= \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$.

Si on rapporte cette courbe à un diamètre quelconque dont le paramètre est q, on aura $y'^2 = qx'$.

PROBLÈMES.

Mener d'un point donné sur la parabole une tangente à cette courbe.

L'axe d'une parabole étant donné avec son paramètre, trouver un diamètre qui fasse, avec ses ordonnées, un angle donné.

Le paramètre d'un diamètre étant donné avec l'origine de ce diamètre et l'angle qu'il fait avec ses ordonnées, trouver l'axe, son origine et son paramètre.

I V.

Appelant a et b le premier et le second demi-axe de l'élipse on a, en comptant les abscisses du sommet $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. si les abscisses sont comptées du centre, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(a^2 - x^2)$ il suit de ces équations que les ordonnées de l'élipse sont proportionnelles aux ordonnées d'un cercle décrit sur le grand axe, et que le cercle n'est qu'une élipse dont les axes sont égaux. Le demi petit axe est moyen proportionnel entre les distances de l'un des foyers aux deux sommets de l'élipse. Le paramètre du grand axe, qui est égal au double de l'ordonnée qui passe par le foyer, $= \frac{4bb}{2a}$, et celui du petit axe $= \frac{4a^2}{2b}$. D'où l'on tire les deux nouvelles équations de la courbe $y^2 = px - \frac{pxx}{2a}$ et $y'^2 = \frac{pa}{2} - \frac{px''x}{2a}$, les abscisses étant comptées du

Décrire une élipse.

sommet ou du centre. La somme des rayons vecteurs est toujours égale au grand axe.

PROBLÈMES.

V.

Mener par un point donné de l'élipse une tangente à cette courbe.

Les angles formés sur la tangente en un point quelconque de l'élipse par les rayons vecteurs tirés des deux foyers, sont égaux. Dans cette courbe, la sounormale $= \frac{bbx}{aa}$. La normale $= \sqrt{b - \frac{b^2x^2}{a^4}(a^2 - b^2)}$; la soutangente $= \frac{a^2 - x^2}{x}$ la ; tangente $= \sqrt{(a^2 - x^2)\left(\frac{bb}{aa} + \frac{a^2 - x^2}{x^2}\right)}$

La distance du centre au point où le grand axe rencontre la tangente $= \frac{a^2}{x}$; la distance du sommet au même point $= \frac{a}{x}(a - x)$. On peut facilement faire entrer dans ces formules l'expression du paramètre et les rapporter à l'origine de la courbe.

V I.

Diamètres conjugués de l'élipse. Paramètres de ces diamètres. Si des extrémités de deux diamètres conjugués, on abaisse du même côté deux perpendiculaires au grand axe, les triangles formés par ces perpendiculaires, les deux demi-diamètres conjugués et les parties du grand axe depuis le centre, seront égaux en surface ; la somme des carrés des parties de l'axe depuis le centre jusqu'à ces perpendiculaires est égale au carré du demi-grand axe ; et la somme des carrés de ces perpendiculaires est égale au carré du demi-petit axe. La somme des carrés des deux diamètres

Étant donnés les deux demi-axes d'une élipse, trouver deux diamètres qui fassent entr'eux un angle donné.

Les deux diamètres et l'angle qu'ils font entre eux étant donnés, trouver les deux axes et leur direction.

conjugués quelconques de l'élipse, est égale à la somme des carrés des deux axes. La surface du parallélogramme formé par les diamètres conjugués, est constante et égale au rectangle des axes. L'élipse a toujours deux diamètres conjugués égaux. Si m et n sont deux diamètres conjugués, on a $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$. Tout diamètre divise l'élipse en deux parties égales, et est divisé en deux également au centre.

V I I.

a et b étant les deux demi-axes de l'hyperbole, on a pour son équation, en comptant les abscisses du sommet $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$. Si les abscisses sont comptées du centre, on a $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$. Si $a = b$ l'hyperbole est équilatère. Le demi-petit axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre les deux distances de l'un des foyers aux deux sommets. Le paramètre du grand axe, égal au double de l'ordonnée qui passe par le foyer, $= \frac{4bb}{2a}$; et celui du petit axe $= \frac{4a^2}{2b}$ d'où l'on tire les deux nouvelles équations de la courbe $y^2 = px + \frac{pxx}{2a}$ et $y'^2 = \frac{px'x'}{2a} - \frac{pa}{2}$. Les abscisses étant comptées du sommet ou du centre. La différence des rayons vecteurs est toujours égale au grand axe.

V I I I.

Les angles formés de chaque côté de la tangente en un point quelconque de l'hyperbole par

PROBLÈMES.

Décrire une hyperbole.

les

les rayons vecteurs tirés des deux foyers, sont égaux. Dans cette courbe, la sounormale $= \frac{bbx}{aa}$; la normale $= \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a^4}(a^2 + b^2) - b^2}$ la soutangente $= \frac{x^2 - a^2}{x}$; la tangente $= \sqrt{(x^2 - a^2)\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{x^2 - a^2}{x^2}\right)}$; la distance du centre au point ou le premier axe rencontre la tangente $= \frac{a^2}{x}$, la distance du sommet au même point $= \frac{a}{x}(x - a)$. On peut, comme dans l'élipse, faire entrer dans ces formules l'expression du paramètre, et les rapporter au sommet de la courbe.

PROBLÈMES.

Mener par un point donné de l'hyperbole, une tangente à cette courbe.

I X.

Les asymptotes de l'hyperbole sont les limites de ses tangentes. La perpendiculaire a l'axe au sommet de la courbe jusqu'à la rencontre de la tangente $= b\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. L'équation de l'hyperbole entre ses asymptotes est $xy = m^2$, m étant la moitié de la diagonale du rectangle formé par les axes. Si plusieurs lignes parallèles coupent une hyperbole, et aboutissent aux asymptotes, les produits de chaque partie comprise entre l'asymptote et la courbe par l'autre partie sont

Une hyperbole étant donnée avec son axe. Déterminer la position des asymptotes.

Décrire une hyperbole entre deux asymptotes données, et qui passe par un point donné.

égaux. Les parties de chacune de ces lignes comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales. La tangente terminée aux asymptotes est divisée en deux également au point de contact.

X.

Diamètres conjugués de l'hyperbole, paramètres de ces diamètres. Si des extrémités des deux diamètres on abaisse du même côté deux perpendiculaires sur le premier axe, les triangles formés par ces perpendiculaires, les deux diamètres et les parties de l'axe depuis le centre, seront égaux en surface, la différence des carrés des parties de l'axe depuis le centre jusqu'à ces perpendiculaires, est égale au carré du demi-grand axe, et la différence des carrés de ces perpendiculaires, est égale au carré du demi-petit axe. La différence des carrés des deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole est égale à la différence des carrés des deux axes. Le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est d'une surface constante et toujours égale à celle du rectangle des axes.

Si m et n sont deux diamètres conjugués, on a $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ Un diamètre divise toutes ses ordonnées en parties égales et est divisé en deux également au centre.

Etant donnés les deux demi axes d'une hyperbole, trouver deux diamètres qui fassent entre eux un angle donné.

Etant donnés les deux diamètres conjugués d'une hyperbole et l'angle qu'ils font entr'eux, trouver les deux axes et leur direction.

PROBLÈMES.

X I.

La quadrature des courbes est une des parties les plus importantes de la géométrie. On obtient celles des sections coniques par la méthode des suites en supposant les surfaces de ces courbes composées d'une infinité de petits rectangles d'une hauteur égale. On trouve par-là que la surface de la parabole est les deux tiers du rectangle formé sur l'abscisse et l'ordonnée; quant à l'ellipse et l'hyperbole, on obtient pour l'expression des surfaces de ces deux courbes, des séries convergentes, desquelles il résulte 1.° que la surface de l'ellipse est à celle du cercle construit sur le grand axe, comme le petit axe est au grand axe; qu'elle est égale à celle du cercle dont le diamètre est moyen proportionnel entre les deux axes, et qu'il y a même rapport entre un secteur elliptique et le secteur circulaire correspondant, qu'entre les surfaces entières. 2.° Qu'il y a même analogie entre l'hyperbole équilatère et une hyperbole quelconque, qu'entre le cercle et l'ellipse; ensorte que si on avait la quadrature d'une seule hyperbole, on aurait aussi-tôt celle de toutes les autres.

Donner les détails de l'application de la doctrine des suites à la quadrature des sections coniques, et des conséquences qui s'ensuivent.

X I I.

m^2 étant la puissance d'une hyperbole a, l'angle que font les asymptotes, on a pour sa surface asymptotique une série logarithmique, qui se réduit à une expression finie; ensorte qu'en nommant s cette surface, on a $s = m^2 \; \mathit{sin.}\, a \, \mathrm{L} \frac{z}{m}$ qui devient $s = \mathrm{L}\, z$ quand l'hyperbole est équilatère et sa puissance $= 1$.; d'où il résulte que cette surface est le logarithme naturel de l'abscisse. Il suit encore de la formule générale de la surface, que les logarithmes tabulaires représentent les aires asymptotiques d'une hyperbole dont la puissance est 1 et dont l'angle des asymptotes est de 25° 44′ 25″. L'espace compris entre une hyperbole et son asymptote est infini.

PROBLÈMES.

Déterminer un trapèze hyperbolique, qui soit à un autre trapèze, dans le rapport de p à q.

QUELQUES AUTRES COURBES.

I.

Parmi les courbes qui sont le plus en usage dans la géométrie, les sections coniques tiennent sans doute le premier rang, mais il y en a plusieurs autres qu'il est important de connaître.

LA CONCHOÏDE. Cette courbe est supérieure et inférieure; elle est de trois espèces, simple, à nœud et à rebroussement. La directrice est son asymptote. Elle est une courbe algébrique et à quatre branches infinies. Son équation générale est $y^4 \pm 2by^3 + [b^2 - a^2 + x^2] y^2 \mp 2a^2by = a^2b^2$. On peut la décrire par le moyen du cercle. On peut décrire une infinité de conchoïdes différentes en employant d'autres courbes au lieu du cercle.

Déterminer les différens cas de la conchoïde á nœud, et de la conchoïde à bec ou à rebroussement.

I I.

LA CISSOÏDE. Sa description donne pour son équation $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$. Cette courbe est algébrique; elle a deux branches égales et infinies qui forment un point de rebroussement à son origine, et qui ont une asymptote commune. Le cercle générateur est coupé par la courbe en deux points également éloignés de son axe.

Déterminer la position de l'asymptote des branches de la cissoïde.

PROBLÈMES.

III.

LA LOGARITHMIQUE. m étant le module et e le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, on a pour l'équation de cette courbe $y = e^{\frac{x}{m}}$. Elle a une branche infinie qui s'approche continuellement de la directrice, sans pouvoir jamais l'atteindre. Elle est du nombre des transcendantes. Sa soutangente est toujours de la même grandeur, et égale au *module*. D'où il suit que dans deux logarithmiques différentes, les abscisses des mêmes ordonnées sont comme les soutangentes, et que par conséquent les logarithmes des mêmes nombres, dans différens systêmes, sont entr'eux comme les modules.

Mener une tangente à un point quelconque de la logarithmique.

IV.

LA CYCLOÏDE. Cette courbe est décrite par un cercle qui peut avoir tout à-la-fois un mouvement de rotation et de translation; d'où il suit qu'elle est simple ou allongée ou accourcie. Son équation générale est $y = \frac{b}{a} u + \mathit{sin}.\, u$, u étant un arc quelconque du cercle générateur pris du sommet. Elle est transcendante. La tangente de la cycloïde ordinaire est parallèle à la corde correspondante de l'arc du cercle générateur, et sa surface totale est triple de celle du même cercle. Il peut y avoir encore plusieurs autres espèces de cycloïdes selon que le point décrivant est pris dans le cercle ou hors du cercle.

Mener une tangente à un point quelconque d'une cycloïde ordinaire accourcie ou allongée.

V.

LA QUADRATRICE. Désignant par c le quart de la circonférence du cercle dont le rayon $= a$, on aura pour l'équation de cette courbe $y = \frac{a-x}{a}$. tang. $\frac{cx}{a}$ en comptant les abscisses de l'extrémité du diamètre. Et si les abscisses sont comptées du centre $y = \frac{x}{a}$ *cot.* $\frac{cx}{a} = \dfrac{a - \frac{c^2x^2}{2a^3} + \frac{c^4x^4}{2.3.4a^7} - \&c.}{\frac{c}{a} - \frac{c^3x^2}{2.3.a^5} + \frac{c^5x^4}{2.3.4.5.a^9} - \&c.}$

Déterminer la position des asymptotes de la quadratrice.

d'où l'on tire lorsque $x = o$, $y = \frac{a^2}{c.}$ expression qui fait voir que si la base de la quadratrice pouvait être déterminée, on aurait aussitôt la quadrature du cercle. Cette courbe est transcendante et a deux branches égales et infinies, dont les asymptotes sont perpendiculaires au diamètre du cercle. Si on pouvait la décrire géométriquement, on aurait immédiatement tous les angles d'un nombre donné de degrés.

VII.

La spirale. Elle prend différens noms, comme spirale d'*Archimède*, *parabolique*, *hyperbolique*, &c. Les ordonnées dans toutes ces courbes partent d'un point fixe, et les abscisses sont représentées par des arcs de cercle ; d'où il suit que ces courbes sont transcendantes.

Mener une tangente à un point quelconque de la spirale d'Archimède.

Appelant k la circonférence dont le rayon est a, on a pour l'équation de la spirale d'*Archimède* $y = \frac{ax}{k}$; cette courbe passe par le centre du cercle générateur, et peut faire une infinité de révolutions. Sa sous-tangente $= \frac{xy}{a}$.

Dans la spirale *parabolique* $y = a - \sqrt{px}$ cette courbe peut faire aussi une infinité de révolutions.

L'équation de la spirale *hyperbolique* est $y = \frac{ab}{mk + x}$, b étant un arc constant du rayon $= a$. Cette courbe a une asymptote et fait une infinité de révolutions au tour de son centre avant que d'y arriver ; sa soutangente est constante et $= b$.

PROBLÈMES.

Mener une eangente à la spirale hyperbolique.

Déterminer l'asimptote de cette courbe.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

I.

Le lieu géométrique d'une équation, est la ligne décrite d'après le rapport des x et des y que cette équation renferme, et ce rapport entre les co-ordonnées sert de base aux constructions géométriques. Toute équation du second degré entre deux indéterminées x et y peut être représentée par la formule $y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0$ dont la construction fera connaître généralement la nature des courbes exprimées par des équations du second degré, quel que soit d'ailleurs l'angle des co-ordonnées, et qui peut être ramenée, d'après cette même construction, à celle-ci, $u^2 + [b - \frac{1}{4} a^2] + [c - \frac{1}{2} ad] \frac{m}{n} z + f - \frac{1}{4} d^2 = 0$ qui donne tous les cas possibles pour ramener l'équation générale proposée aux courbes qu'elle doit exprimer.

Développer les équations particulières qui résultent de l'équation générale.

I I.

Le détail des combinaisons que fournit l'équation générale proposée, fait voir qu'elle appartient toujours à une section conique ou qu'elle n'exprime aucune ligne possible. 1.° Elle appartient à une parabole si $b = \frac{1}{4} a^2$, c'est-à-dire, si les trois premiers termes forment un carré parfait, ou s'il ne reste de ces trois premiers termes que x^2 ou y^2 ; 2.° elle appartient à une élipse si b est plus grand que $\frac{1}{4} a^2$, et si en même-temps le terme qui contient x^2 est positif. Et dans ce cas elle peut appartenir à un cercle si $b = 1$, et si l'angle des co-ordonnées est droit ; 3.° elle appartient à une hyperbole si b est plus petit que $\frac{1}{4} a^2$ ou si b est négatif, ou si ayant le rectangle xy elle manque de l'un des deux carrés x^2 ou y^2 ; 4.° elle appartient à une hyperbole entre ses asymptotes si les deux carrés x^2 et y^2 manquent à-la-fois. Tels sont les principes d'après lesquels on ramène aux sections coniques toute équation du second degré, à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible. Ces principes s'appliquent avec succès à la résolution de plusieurs questions indéterminées dont le détail jette le plus grand jour sur toute cette théorie aussi utile qu'intéressante.

III.

Les mêmes principes peuvent servir à résoudre des questions déterminées. Lorsque l'équation finale qui exprime les conditions d'un problème passe le second degré, on emploie pour la résoudre l'intersection des courbes auxquelles on donne une même abscisse, en supposant qu'elle est le résultat de deux équations partielles à deux indéterminées, qui, construites séparément, donnent chacune une courbe. Si le problème est possible, les courbes se coupent en autant de points

PROBLÈMES.

Deux points étant donnés ; trouver la courbe telle qu'en menant, de ces deux points, deux droites qui se rencontrent en un même point de cette courbe, l'angle qu'elles forment entr'elles soit toujours le même.

Si dans l'angle formé par deux lignes, on fait mouvoir une autre ligne, de manière que ses extrémités restent toujours sur les côtés de cet angle, déterminer la courbe décrite par un point pris sur cette ligne.

Faire passer une section conique par cinq points donnés.

Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

Diviser un arc de cercle en trois parties égales.

points qu'il a de solutions : en sorte que tant que le deux équations qui expriment ces courbes ne passeront pas le second degré, la solution ne dépendra jamais que de l'intersection de deux sections coniques. De là il suit qu'on peut resoudre par l'intersection des sections coniques toute équation déterminée du troisième et du quatrième degré. Dans chaque cas les sections à construire se couperont en autant de points qu'il y aura de racines réelles, et s'il y a des racines égales elles se toucheront en un ou deux points. La solution des équations plus élevées dépend de l'intersection des courbes d'ordres plus élevés que les sections coniques. L'élégance d'une construction géométrique demande qu'on y emploie les courbes les plus simples du même ordre.

PRINCIPES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

Toute grandeur peut varier d'une quantité quelconque en augmentant ou en diminuant. Suivre les rapports de ces variations, et remonter par la connaissance de ces rapports à la grandeur elle-même, est l'objet du calcul infinitésimal. Origine de ce calcul. Méthodes qui l'ont précédé; il se divise en calcul différentiel et en calcul intégral.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

I.

Le calcul différentiel enseigne à trouver les différences ou variations infiniment petites d'une quantité variable quelconque. On emploie la lettre *d* pour désigner ces différences. Avantages de cette

PROBLÈMES.

Résoudre, par une construction géométrique l'équation générale du troisième degré, $x^3 \pm p^2 x - p^2 q$.

Trouver les racines de l'équation générale du quatrième degré $x^4 - p^2 x^2 + p^2 qx + p^3 r = o$ *par le moyen du cercle et d'une parabole.*

notation; pour obtenir l'expression de ces différences on considére toujours la grandeur dans deux états differens, et on observe la relation que doivent garder entr'eux les infinimens petits des différens ordres. C'est ainsi qu'on trouve les différentielles suivantes : $d\,[\,ax\,] = adx$; $d.\,(x^m) = mx^{m-1}\,dx$; $d\,[\,xy\,] = ydx + xdy$; $d\,[\frac{x}{y}] = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; $d.\,[az + z^2]^{\frac{1}{m}} = \frac{dz\,(a + 2z)}{m\,(az + z^2)^{\frac{m-1}{m}}}$; &c. d'où il est facile de trouver la différentielle de toute fonction algébrique. Outre ces différences qu'on appelle *premières*, il y a encore des différences *secondes*, *troisièmes*, &c. $dd\,(x^m) = mx^{m-1}\,ddx + m.\,m-1\;x^{m-2}.\,dx^2$; $dd\,(xy) = xddy + yddx + 2dxdy$. &c.

Pour abréger le calcul, on peut supposer constante une différentielle première, seconde, &c.

PROBLÈMES.

Développer la manière de différencier une expression algébrique quelconque.

II.

On obtient par les mêmes principes les différentielles des quantités logarithmiques et exponentielles, ou de celles qui renferment des sinus, cosinus, &c. Ainsi, on a $d.\,(L.\,x) = \frac{dx}{x}$; $d.\,(L.\,x)^m = m\,(L.x)^{m-1}\frac{dx}{x}$; $d.\,LL.x = \frac{dx}{x\,L.x}$; &c.... $d.\,(x^y) = x^y\,(dy\,L.\,x + \frac{ydx}{x})$; $d\,(a^x) = a^x\,dx\,L.\,a$. D'oú il est aisé d'avoir $d\,(xy^z)$ &c.......... $d.\,sin.\,x = d.\,x\,cos.\,x$; $d.\,cos.\,z =$

Trouver la différentielle d'une expression logarithmique, exponentielle ou

$-dz\,\text{sin}.\,z$ .. $d.\text{tang}.\,z = \frac{dz}{\text{cos}.^2 z}$ ... $d\,\text{cot}.\,z = \frac{-dz}{\text{sin}.^2 z}$; ... $d\,\text{sec}.\,z = \frac{dz\,\text{sin}.\,z}{\text{cos}.^2 z}$; . $d\,\text{cosec}.\,z = \frac{-dz\,\text{cos}.\,z}{\text{sin}.^2 z}$ &c. On tire de ces différentielles celles de $d.\,\text{sin}.^m z$; $d.\,\text{cos}.^m z$; $d.\,\text{tang}.^m z$; $d.\,\text{cot}.^m z$. $d.\,\text{sec}.^m z$ et $d\,\text{cosec}.^m z$.

On peut aussi avoir les différentielles secondes, troisièmes, &c. de toutes ces quantités.

PROBLÈMES.

affectée de sinus, cosinus, &c.

III.

On peut faire plusieurs applications de ces principes..... dans une courbe dont les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses, la soutangente $= \frac{ydx}{dy}$; ..... La tangente $= \frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2}$;

Appliquer ces formules aux sections coniques.

La sous-normale $= \frac{ydy}{dx}$ La normale $= \frac{y}{dx}$; $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. C'est avec ces formules, et par de simples substitutions, qu'on déterminera toutes ces lignes pour un point quelconque d'une courbe dont on a l'équation.

IV.

On peut concevoir une courbe engendrée par le développement d'une autre courbe qui prend le nom de développée, et dont la longueur à chaque développement partiel, exprimée par une ligne droite, touche cette courbe à l'extrémité de l'arc développé, et est perpendiculaire à la courbe engendrée à chaque point correspondant. De là le rayon osculateur ou rayon de courbure, dont l'expression est souvent nécessaire.

Nommant R ce rayon, on a $R = \frac{ds^3}{-dx^2 d\left[\frac{dy}{dx}\right]}$ qui servira à mesurer la courbure d'une courbe en un point quelconque.

PROBLÈMES.

Déterminer l'expression du rayon de courbure dans les sections coniques.

V.

Pour trouver entre plusieurs quantités qui croissent ou qui décroissent suivant une certaine loi, quelle est la plus grande ou la petite; on emploie la méthode des *maximis* et *minimis*, qui consiste particulièrement à considérer l'expression du rapport de ces quantités comme l'équation d'une courbe dans laquelle l'ordonnée peut devenir un *maximum* ou *minimum*, ou tout à-la-fois un *maximum* et un *minimum*, suivant que la tangente sera parallèle ou perpendiculaire à l'axe. Ces cas donnent $\frac{dy}{dx} = o$ ou $\frac{dx}{dy} = o$ et pour les distinguer d'une manière générale, il faut avoir égard en même-temps à l'expression du rayon de courbure, qui pouvant devenir positif ou négatif, infini ou nul, peut faire connaître le vrai caractère de la quantité dont on cherche la nature. Détails sur cette matière.

Diviser une quantité a en deux parties, telles que le produit $x^m (a-x)^n$ soit le plus grand possible.

Trouver les diamètres conjugués de l'élipse qui font entr'eux le plus petit angle.

De toutes les paraboles que l'on peut couper dans un cône droit, déterminer celle qui a le plus de surface.

Trouver le nombre x, dont la racine x est un maximum.

V I.

Il se présente souvent des expressions algébriques en forme de fractions dont les numérateurs et les dénominateurs se réduisent à zéro dans certains cas, qui, quoique indéterminées en apparence, sont pourtant susceptibles de valeurs déterminées. $\frac{P}{Q}$ étant une fraction de ce genre, on la changera en $\frac{dP}{dQ}$; si la valeur donnée à x ne

Trouver la valeur de la fraction $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ lorsque $x = a$.

Trouver la valeur de $y = \frac{a - x}{a \cot. \frac{cx}{a}}$, qui est l'équation de la quadratrice, lorsque $x = a$

réduit pas cette nouvelle fraction a $\frac{0}{0}$, on aura la valeur de la fraction primitive ; mais si cette nouvelle fraction représentée par $\frac{P'}{Q'}$ se réduit a $\frac{0}{0}$, on la changera encore en $\frac{dP'}{dQ'}$ qui donnera la valeur de la fraction primitive dans la même supposition si elle ne se réduit pas a $\frac{0}{0}$; dans le cas contraire on changera cette dernière exprimée par $\frac{P''}{Q''}$ en $\frac{dP''}{dQ''}$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait une valeur dont un des termes, au moins, soit fini.

PROBLÈMES.

Déterminer la valeur de la fraction $\frac{1-x}{L.x}$ lorsque $x=1$.

Calcul intégral.

I.

Le calcul intégral a pour objet de trouver la quantité à laquelle appartient une différentielle donnée, c'est-à-dire de déterminer le rapport des variables par celui de leurs différentielles. On se sert de la lettre $\int$ pour désigner une intégrale. Toute différentielle monome $x^n dx$ est intégrable algébriquement, excepté lorsque $n = -1$. son intégrale algébrique est $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; mais si $n = -1$ on a alors $\int \frac{dx}{x} = Lx. + C.$ Il suit de là que l'on obtiendra toujours l'intégrale d'une différentielle polynome à une variable réductible à une suite de monomes. Dans toute intégration il faut ajouter une constante. On la supposera par la suite.

Donner la règle générale d'intégration et l'appliquer à des différentielles susceptibles d'intégration immédiate.

I I.

Toute différentielle bynome $x^n dx (a + x^m)^k$

PROBLÈMES.

Développer ces différens cas.

est intégrable algébriquement, 1.° toutes les fois que $n = m - 1$; quelles que soient d'ailleurs les valeurs de m et de k; 2.° toutes les fois que k est un nombre entier positif, quels que soient m et n; 3.° toutes les fois que $\frac{n+1}{m}$ sera un nombre entier positif; 4.° enfin, si $\frac{mk+n+1}{-m}$ donne pour quotient un nombre entier positif.

Appliquer l'intégration par séries à des exemples.

On est souvent obli gé d'intégrer par séries, et ce n'est pas la partie la moins intéressante du calcul intégral: on obtient au moins l'intégrale par approximation.

III.

Exposer les moyens qui servent à trouver ces intégrales.

Il y a beaucoup de différentielles dont les intégrales se rapportent ou aux logarithmes, ou aux quantités exponentielles, ou aux sinus, cosinus &c. On a généralement $\int \frac{dx}{a+x} = L.(a+x)$; $\int \frac{ydx - xdy}{xy} = L.\frac{x}{y}$; $\int \frac{a^x dx}{x} = L.x + x\,L.a + \frac{1}{2}\,\frac{x^2 L.^2 a}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3 L.^3 a}{2 \cdot 3} +$ &c. $\int dx \cos.x = \text{fin}.x$; $\int dx\,\text{fin}.x = -\text{cof}.x$

D'où l'on pourra trouver l'intégrale d'une différentielle composée du produit de plusieurs sinus et cosinus, ou entre le même arc x; $\int \frac{dx}{\text{cof}.^2 x} = \text{tang}.x$; $\int \frac{dx}{\text{cof}.^2 x} = -\cot.x$; $\int \frac{dy\,\text{cof}.y}{\text{fin}.y} = L.\text{fin}.y$; $\int \frac{dy\,\text{fin}.y}{\text{cof}.y} = -L.\text{cof}.y$; $\int \frac{dy}{\text{fin}.y} = L.\text{tang}.\frac{1}{2}y$; $\int \frac{dy}{\text{cof}.y} =$

$L. tang. (45^\circ + \frac{1}{2} z)$. $\int \frac{d\, sin.\, z}{\sqrt{1 - sin.^2 z}} = arc.\, sin.\, z$; $\int \frac{d\, cos.\, z}{\sqrt{1 - cos.^2 z}} = -arc.\, cos.\, z$; $\int \frac{d\, tang.\, z}{1 + tang.^2 z} = arc.\, tang.\, z$. &c. Si on veut intégrer ces différentielles par séries, on aura facilement la longueur d'un arc de cercle en fonctions de son sinus, de son cosinus, de sa tangente &c.

PROBLÈMES.

I V.

Entre les applications qu'on peut faire de ces principes très-élémentaires, celles qui regardent les courbes est des plus importantes. On les applique avec la plus grande simplicité à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la mesure des surfaces et des solidités des solides de révolution. Nommant E un espace curviligne compris entre deux ordonnées parallèles, L la longueur d'un arc de courbe quelconque, S la surface d'un solide de révolution, S' la solidité du même solide, et k la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, on aura $E = \int y dx + C$

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} + C$$

$$S = 2\, k \int y \sqrt{dx^2 + dy^2} + C$$

$S' = k \int y^2\, dx + C$. On pourra toujours faire usage de ces formules dès qu'on aura l'équation de la courbe, et l'on obtiendra E, L, S et S' exactement ou par approximation.

Trouver les surfaces de l'élipse, de la parabole, de l'hyperbole entre ses asymptotes et de la cissoïde.

Rectifier un arc quelconque de cercle ou de cycloïde.

Trouver la surface de la sphère ou celle du paraboloïde.

Determiner la solidité de l'élipsoïde, et celle du paraboloïde.

V.

Si l'on veut trouver l'équation d'une courbe dont on connaît quelque propriété, ont peut y

Trouver la courbe dont la sounormale est constante.

parvenir par le moyen des principes précédens, en égalant la propriété donnée à l'expression générale de la même propriété exprimée par le moyen du calcul différentiel. On aura ainsi une équation qui, par l'intégration exacte ou indiquée, donnera celle de la courbe. Cette méthode est appelée *méthode inverse des tangentes.*

PROBLÈMES.

Trouver la courbe dont la soutangente est $\frac{a^2+x^2}{x}$

Trouver la courbe dans laquelle la somme de la sounormale et de l'abscisse est constante.

RÉPONDRA:

LE CITOYEN

LÉONARD DALESME, *de la commune de Bassillac, Elève de Mathématiques.*

TAMARELLE-LAGRAVE, *Professeur.*